



Forblad

Brudteori for beton

Jørgen Nielsen

Tidsskrifter

BSM 26-1 Bygningsstatistiske Meddelelser

1955

BRUDTEORI FOR BETON

Af

JØRGEN NIELSEN

INDLEDNING

620.17:624.012.4:624.04

I efterfølgende artikel er en vurdering af betonens brudforhold givet på grundlag af Mohr's brudhypotese. Artiklen indledes med en oversigt over de gængse brudteorier. I andet afsnit undersøges forskellige Mohr'ske brudfunktioner, og det vises, at den hyppigt benyttede metode, blot at sikre, at hovedspændingerne i betonen er mindre end visse fastsatte værdier, er på den usikre side ved store trykspændinger. Artiklen afsluttes med nogle bemærkninger om bruddets natur.

A. BRUDHYPOTESER

De gængse brudteorier falder i 3 grupper: spændingshypoteser, deformationshypoteser og energihypoteser, efter hvilken egenskab der anses for bestemmende for bruddets indtræden.

Skal et snit brydes, må det ske som følge af, at sammenhængskræfterne i snittet overvindes af de forhåndenværende spændinger σ og τ . Spændingshypoteserne bygger da på den simple antagelse, at sammenhængskræfterne er uafhængige af de deformationer, legemet har undergået, og dermed også af spændingerne i andre snit gennem brudstedet, medens deformations- og energihypoteserne forudsætter, at sammenhængskraften i hvert snit på passende måde afhænger af hele spændings- og deformationstilstanden på det pågældende sted.

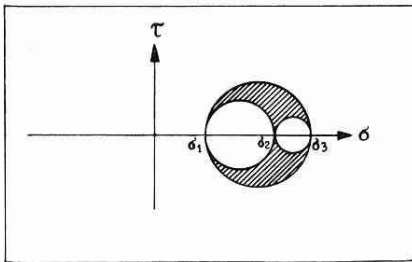


Fig. 1.

SPÆNDINGSHYPOTEBEN

Alle spændingshypoteser for homogene materialer lader sig indbefatte i MOHR'S, der blot forudsætter, at der til hver normalspænding σ i et snit er en ganske bestemt forskydningsspænding τ , som medfører brud i det pågældende snit. Hvorledes τ afhænger af σ kan være forskelligt for forskellige ma-

aterialer. For et heterogent materiale som beton vil σ, τ -afhængigheden naturligvis være forskellig fra det ene sted til det andet og iøvrigt også afhænge af snitretningen, men da materialet består af overordentlig mange korn, må man dog forvente, at materialet som helhed kan behandles ud fra en passende σ, τ -kurve, såfremt spændingshypoteserne er brugbare. Herom nærmere i sidste afsnit.

MOHR'S fremstilling af den treaksede spændingstilstand i et punkt af legemet er gengivet på fig. 1, hvor σ_1 , σ_2 og σ_3 betegner de tre hovedspændinger. Her som overalt i det følgende regnes trykspændinger positive, trækspændinger negative. Spændingskombinationerne σ, τ for alle snitretninger afbildes ved det skraverede areal på figuren. Af figuren ses, at den største værdi, τ kan antage for et bestemt σ , ligger på cirklen, der spænder fra σ_1 til σ_3 . Kun den mindste og den største hovedspænding er bestemmende for denne cirkels beliggenhed og dermed for de største værdier af τ . Hvis een af τ -værdierne på cirklen når den til den pågældende σ -værdi svarende brudværdi, finder bruddet sted. Spændingshypoteserne medfører derfor, at den mellemste hovedspænding er uden betydning for bruddet.

I σ, τ -koordinatsystemet kan tillige indlægges den kritiske kurve, som angiver, ved hvilke kombinationer af σ og τ brud indtræffer. Betingelsen for, at brudtilstanden i et punkt ikke nås, er da, at den Mohr's cirkel, der repræsenterer σ, τ_{\max} i punktet, falder inden for den kritiske kurve. Denne bliver således indhyllingskurve for alle kritiske Mohr'ske cirkler, se fig. 2. Røringspunktets beliggenhed i cirklerne giver oplysning om brudsnittets retning. På fig. 2 er indlagt de to Mohr'ske cirkler, som afgrænser den plane spændingstilstand (tredie hovedspænding 0). Da indhyllingskurven angiver grænsen for de Mohr'ske cirkler, kaldes den i det følgende grænsekurven.

Specielle spændingsteorier fremstilles ved specielle grænsekurver. Er denne en cirkel med centrum på σ -aksen, således at røringsspunkterne for de Mohr'ske cirkler kun kan falde på σ -aksen, se fig. 3, fremstilles hypotesen om *kritisk hovedspænding* (RANKINE, LAMÉ, CLAPEYRON). Er grænsekurven en ret linie parallel med σ -aksen som på fig. 4, fremstilles GUEST's hypotese om *kritisk forskydningsspænding* (oprindelig foreslået af COULOMB). Er grænsekurven endelig blot retlinet men under hældning med σ -aksen, fremstilles *friktionshypotesen*, der søger en kritisk værdi for udtrykket $\tau \div \mu\sigma$, hvor μ er at opfatte som en friktionskoefficient for indre bevægelser i materialet. (Også denne brudhypotese er fremsat af COULOMB, senere udformet bl. a. af NAVIER, MOHR, GUEST, SUNATANI, P. M. FRANDSEN). μ indgår på fig. 5 som grænselinjens retningskoefficient. På fig. 4 og 5 er vist de Mohr'ske cirkler, som afgrænser den plane spændingstilstand.

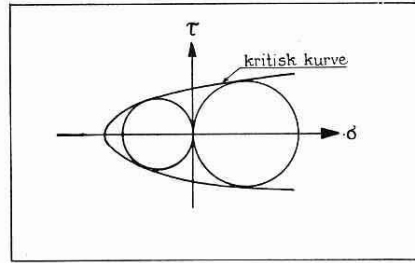


Fig. 2.

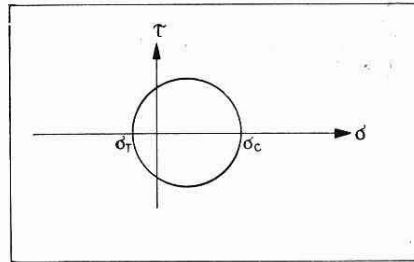


Fig. 3.

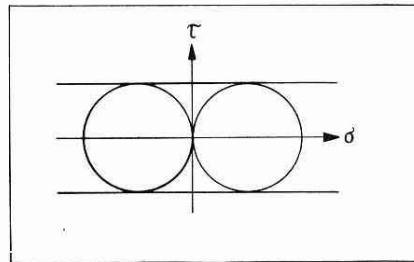


Fig. 4.

DEFORMATIONSHYPOTHESEN

I sin simpleste form regner deformationshypotesen, at brud indtræder, når den største forlængelse når en konstant kritisk værdi. Teorien vil kendes som SAINT-VENANT'S hypotese, men kan føres tilbage til MARIOTTE, PONCELET og BACH har især bi-

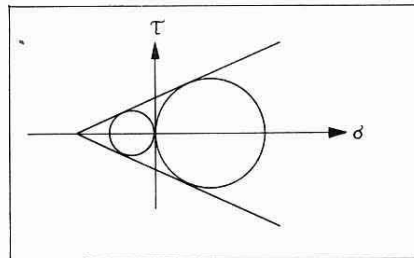


Fig. 5.

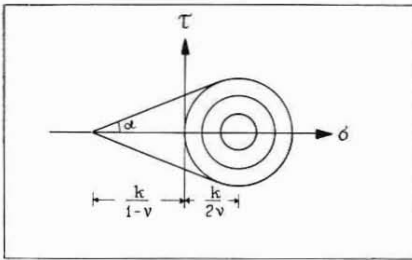


Fig. 6.

ding indgår. På fig. 6 er teoriens resultater vist for en plan spændingsstilstand i et σ, τ -koordinatsystem under forudsætning af konstante værdier af E og ν . Begrænsningen af forlængelserne i spændingsplanen medfører, at de Mohr'ske cirklers indhyllingskurve bliver de skrå linier til venstre på figuren. Liniernes vinkel med σ -aksen er bestemt ved $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1-\nu}{2\sqrt{\nu}}$, hvor ν er Poissons forhold. De indtegnede cirkler til højre på figuren antyder begrænsningen af forlængelserne vinkelret på planen. Den yderste cirkel falder sammen med Mohr's afskæringscirkel for plan spændingstilstand. Spidsen tilvenstre ligger på trækspændingen $\frac{k}{1-\nu}$ hvor $k = E\varepsilon_{kr}$. Centrum for cirklerne til højre ligger ved trykspændingen $\frac{k}{2\nu}$, og ingen Mohr's cirkel må have sit centrum længere til højre. Når bortses fra dette forhold og fra partiet nærmest spidsen til venstre, som MOHR afskærer, ses teorien ved passende valg af ν og μ at være i overensstemmelse med friktionshypotesen¹⁾. ν har ikke samme værdi som ved elastiske forhold, men må vælges i overensstemmelse med brudforsøgene.

Hypotesen kombineres undertiden med en forudsætning om en vis kritisk forkortelse. Det tilsvarende billede af den plane spændingstilstand kan se ud som vist

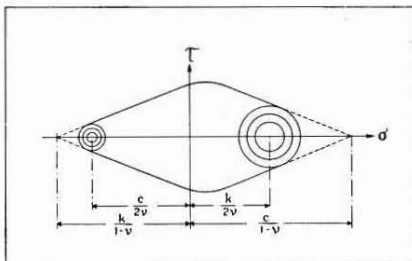


Fig. 7.

draget til dens udbredelse. Omskrives kriteriet til spændinger, kræves

$$-\frac{1}{E}(\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)) = \varepsilon_{kr},$$

hvor E og ν betegner elasticitetskoefficienten og Poissons forhold ved brud. Udtrykket viser, hvorledes den mellemste hovedspænding

kan se ud som vist på fig. 7. Er den kritiske forkortelse tilstrækkelig stor i forhold til den kritiske forlængelse, vil dog kun forlængelsen have betydning for den plane spændingstilstand.

¹⁾ Se herom P. M. FRANSEN: Bygningsstatik II, 2. udg. 1944, s. 65—66.

ENERGIHYPOTESEN

Energihypotesen, som hidrører fra BELTRAMI og HAIGH, går ud fra en kritisk værdi af den i hver rumenhed af materialet op-hobede deformationsenergi. Deraf følger

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) = K.$$

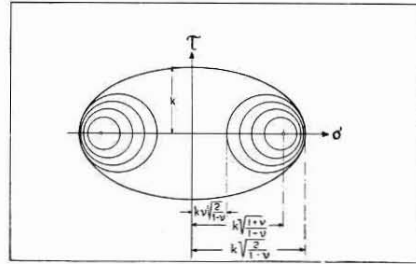


Fig. 8.

I den plane spændingstilstand $\sigma_3 = 0$ findes

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\nu\sigma_1\sigma_2 = 2(1 + \nu)k^2,$$

idet højre side er en praktisk skrivemåde for den kritiske konstant. Indhyllingskurven til de Mohr'ske cirkler bliver en ellipse med store halvakse $\sigma_k = k\sqrt{\frac{2}{1-\nu}}$ og lille halvakse $\tau_k = k$, se fig. 8. Dog kan i lighed med det for deformationshypotesen gældende ikke alle cirkler tolereres. For σ_1 lig store halvakse er $\sigma_2 = \nu\sigma_1$. Større værdier af σ_2 kan kun tolereres sammen med mindre værdier af σ_1 , således at de Mohr'ske cirkler trækker sig sammen om ellipsens brændpunkter ($\sigma_f = k\sqrt{\frac{1+\nu}{1-\nu}}$). (Den samlede cirkelskare kan opfattes som horisontalprojektion af vandrette snit i en skråliggende ellipsoide).

Der er her samme usikkerhed om valget af ν som i deformationshypotesen. v. MISES har valgt $\nu = 1/2$ for brudtilstanden, d. v. s. han betragter legemet som usammentrykkeligt og medregner således kun deviationerne (deviationshypotesen). Samme hypotese findes iøvrigt allerede hos MAXWELL. Brudkriteriet bliver

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1 = 3k^2,$$

for den plane spændingstilstand altså

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2 = 3k^2.$$

Ellipsens halvaksler bliver $\sigma_k = 2k$ og $\tau_k = k$. $\sigma_1 = 2k$ følges med $\sigma_2 = k$, hvorefter de Mohr'ske cirkler trækker sig sammen om brændpunktet $\sigma_f = k\sqrt{3}$.

Energihypotesen (og dermed deviationshypotesen) lider af den begrænsning, at materialet regnes at have ens træk- og trykstyrke. Allerede af denne grund er de uegnede til opstilling af brudteori for beton. Her vil vi i det følgende holde os til MOHR's hypotese, som har tilstrækkelige tilpasningsmuligheder til beton.

Iøvrigt indbefattes alle de nævnte brudhypoteser i MOHR's, når spændingstilstanden er plan og hovedspændingerne har modsat fortegn, således som det almindeligvis vil være tilfældet i bjælker.

B. MOHR'S BRUDHYPOTHESE FOR BETON

Såfremt Mohr's kurve for forskydningspændingens afhængighed af normalspændingen i brudsnittet blev fastlagt nøjagtigt ved forsøg med beton, ville man utvivlsomt finde en ikke uvæsentlig afvigelse i kurveforløbet for de forskellige betontyper, der forekommer i praksis. Skal der opstilles brugelige beregningsregler, må betonen imidlertid karakteriseres ved de færrest mulige konstanter, og grænsekurven må regnes ens for de forskellige betoner, som har samme konstanter. Da kurven således kun kan give tilnærmet udtryk for de virkelige brudforhold, kan den med tilstrækkelig nøjagtighed udtrykkes som en matematisk funktion af betonens karakteristiske konstanter. I det følgende er gennemgået nogle muligheder for kurvevalget, idet betonen alene karakteriseres ved brudspændingerne for eenakset træk og tryk, henholdsvis $-\sigma_T$ og σ_c .

I bjælker af jernbeton eller forspændt beton beregnes ikke umiddelbart hovedspændingerne, men spændingerne i lodrette snit, og det har derfor interesse at følge de til en valgt grænsekurve svarende brudspændinger σ_n og τ_n i disse snit. I de derpå vinkelrette vandrette snit

kan normalspændingen almindeligvis betragtes som forsvindende, medens forskydningspændingen er numerisk lig den i det lodrette snit bestemte. Mohr's cirkel for spændingerne skal derfor i brudtilstanden gå gennem $(0, \tau_n)$ og (σ_n, τ_n) og desuden tangere den valgte grænsekurve, se fig. 9. På hver mulig brudcirkel mellem een-

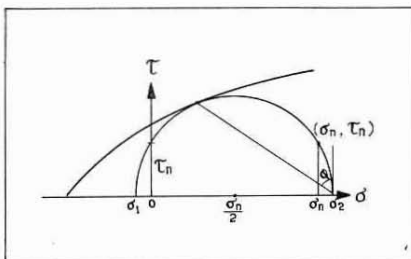


Fig. 9.

akset træk og eenakset tryk kan således aflæses en kritisk kombination (σ_n, τ_n) af spændingerne i lodrette snit. Tilsammen danner disse punkter en kritisk kurve for spændingerne i lodrette snit.

En sådan kurve for sammenhængen σ_n, τ_n efter RANKINE'S i praksis meget anvendte brudhypotese, hovedspændingen alene afgørende, er gengivet på fig. 10. Den Mohr'ske indhyllingskurve er som foran beskrevet cirklen med diameterendepunkter $-\sigma_T$ og σ_c . Den kritiske kurve for σ_n, τ_n er sammensat af to parabler, svarende til, at henholdsvis trækstyrken og trykstyrken er afgørende. Parablernes ligninger er

$$\tau_n = \sqrt{\sigma_T(\sigma_T + \sigma_n)}$$

$$\text{og } \tau_n = \sqrt{\sigma_c(\sigma_c - \sigma_n)}.$$

Skæringspunktet mellem parablerne har koordinaterne $\sigma_n = \sigma_c - \sigma_T$ og $\tau_n = \sqrt{\sigma_c \sigma_T}$ og ligger på indhyllingscirklen. Er σ_c f. eks. lig $15 \sigma_T$, fås i skæringspunktet $\sigma_n = 14 \sigma_T = 0,933 \sigma_c$ forskydningsspændingen $\tau = 3,87 \sigma_T = 0,26 \sigma_c$, hvilken værdi ifølge det efterfølgende må anses for altfor høj.

Som anført repræsenteres brudsnittet for hver kritisk Mohr's cirkel af røringpunktet med grænsekurven. Brudsnittets retning er da bestemt ved, at det danner vinklen φ med hovedsnittet, hvor φ er tangentvinklen i Mohr's cirkel mellem hovedspændingspunktet og røringpunktet (se fig. 9). Opfattes Rankines brudhypotese som et specielt tilfælde af Mohr's, medfører dette, at brudsnittene skal falde sammen med hovedsnittene. Medens dette passer meget godt ved trækbrud og også ved forskydningsbrud (største hovedtrækspænding under 45°), er det ganske forkert ved trykbrud, hvor forsøg viser, at brudsnittene danner en vinkel på 70° eller mere med de snit, hvor største hovedtrykspænding findes. Dette viser, at Rankines brudteori i hvert fald ikke kan forventes at have gyldighed for kombinationer σ_n, τ_n , hvor σ_n nærmer sig materialets trykstyrke.

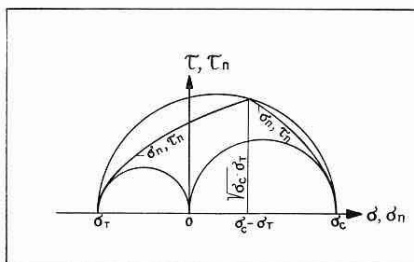


Fig. 10.

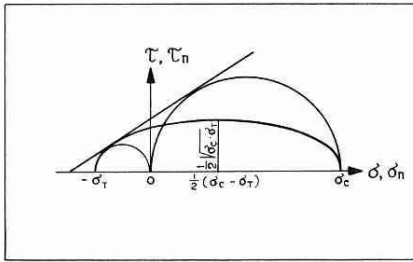


Fig. 11.

Bedre overensstemmelse med trykforsøget giver friktionshypotesen, hvor Mohr's grænsekurve er en ret linie under passende hældning med σ - og τ -aksen, fig. 11. Da linien tangerer cirklerne for eenakset træk- og tryktilstand, bliver dens ligning

$$\tau = \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_c \sigma_T} \left(1 + \frac{\sigma_c - \sigma_T}{\sigma_c \sigma_T} \cdot \sigma \right).$$

Den kritiske kurve for σ_n, τ_n bliver en ellipse med σ -aksen som symmetriakse. Dens ligning er

$$\tau_n = \frac{\sqrt{\sigma_c \sigma_T}}{\sigma_c + \sigma_T} \sqrt{(\sigma_c - \sigma_n)(\sigma_n + \sigma_T)}.$$

Ellipsen spænder fra $-\sigma_T$ til σ_c . Dens største højde er $1/2 \sqrt{\sigma_c \sigma_T}$, altså kun halvdelen af hovedspændingshypotesens, og forekommer ved samme værdi af forholdet τ_n/σ_n . For $\sigma_n = 0$ er $\tau_n = \frac{\sigma_c \sigma_T}{\sigma_c + \sigma_T}$, altså lidt mindre end σ_T . Samme lave højde haves for $\sigma_n = \sigma_c - \sigma_T$, hvor hovedspændingshypotesen giver den største værdi for τ_n .

Medens friktionshypotesen giver brugelig overensstemmelse ved trykforsøget, svigter den imidlertid ganske ved mindre normalspændinger, hvor brudtilstanden synes at følge hovedspændingshypotesen. Ved ren forskydning sker bruddet således for $\tau_n = \sigma_T$ og ikke for en lidt mindre værdi. Friktionshypotesen ville desuden medføre, at brudsnittet altid lå under en fast vinkel α med snittet med mindste hovedspænding, bestemt ved

$$\cos 2 \alpha = \frac{\sigma_c - \sigma_T}{\sigma_c + \sigma_T},$$

medens såvel trækforsøget som forskydningsforsøget viser, at brudsnittet falder sammen med snittet med størst trækspænding (mindste hovedspænding). MÖRSCH har endda ved forsøg med samtidig tryk σ_n og forskydning τ_n fundet trækspændingen bestemmende for såvel brudkraftens størrelse som brudsnittets retning inden for hele det undersøgte område. Det påførte normaltryk σ_n var indtil 5,8 gange trækstyrken σ_T . Ved Mörsch's forsøg var $\sigma_c = \text{ca. } 14 \sigma_T$.

Hverken friktionshypotesen eller hovedspændingshypotesen kan således give fuld forklaring på betonens brudforhold. Hvis grænsekurven derimod vælges således, at den skærer σ -aksen med en passende krumningsradius, kan man opnå, at træk hovedspændingen og grænsekurven bliver bestemmende for brud i hver sit område, således som det fremgår af fig. 12. For alle brudforsøg, for hvilke største hovedspænding σ_2 afbildes på den af krumningscirklen afskårne strækning af σ -aksen, vil røringpunktet falde i $(-\sigma_T, 0)$, således at hovedspændingshypotesen — og den dertil svarende parabel for σ_n, τ_n — gælder i dette område.

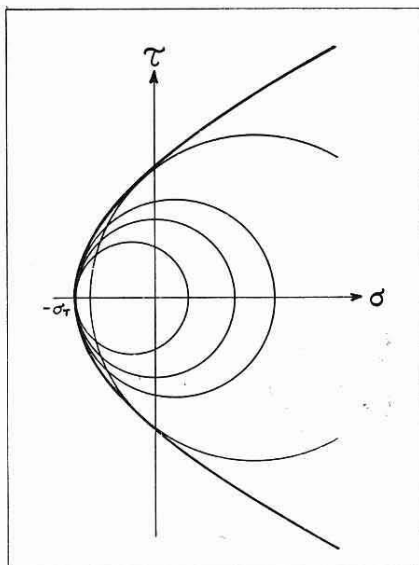


Fig. 12.

For større værdier af σ_2 er grænsekurven bestemmende. Den dertil svarende kurve for σ_n, τ_n tangerer parabelen i overgangspunktet. Ved passende valg af kurveform kan Mohr's brudteori bringes i god overensstemmelse med de foreliggende brudforsøg.

Et sådant passende valg er en parabel eller en hyperbel med σ -aksen som 1. akse. Denne grænsekurve kan skrives på formen

$$\tau = \sqrt{a\sigma^2 + b\sigma + c}.$$

Asymptotehældningen er \sqrt{a} . Parablen fås for $a = 0$.

Det bemærkes iøvrigt, at friktionshypotesen kan indbefattes i det nævnte udtryk ved at sætte $b = 2\sqrt{ac}$.

Grænsekurven skal gå gennem $(-\sigma_T, 0)$ og tangere cirklen for eenakset tryktilstand. Derved fås

$$b = a\sigma_T + \left(\sqrt{\sigma_c + \sigma_T} - \sqrt{(1+a)\sigma_T}\right)^2$$

og

$$c = \sigma_T \left(\sqrt{\sigma_c + \sigma_T} - \sqrt{(1+a)\sigma_T}\right)^2.$$

Den kritiske kurve σ_n, τ_n er en ellipse, ligning

$$\tau_n = \frac{1}{2\sqrt{1+a}} \cdot \sqrt{(\sigma_c - \sigma_n)(\sigma_n - d)},$$

hvor

$$d = -\sigma_T + (\sqrt{\sigma_c + \sigma_T} - 2\sqrt{(1+a)\sigma_T})^2$$

betegner ellipsens venstre skæringspunkt med σ -aksen.

Ellipsens centrum ligger i $(b, 0)$.

Ellipsen gælder for

$$\sigma_n \geq \sigma_g = \sigma_c - 2\sqrt{(1+a)(\sigma_c + \sigma_T) \cdot \sigma_T}.$$

For $\sigma_n \leq \sigma_g$ gælder parablen

$$\tau_n = \sqrt{\sigma_T(\sigma_T + \sigma_n)}$$

som ved hovedspændingshypotesen.

Den største forskydningspænding bliver

$$\tau_{n,\max} = \sqrt{c} = \sigma_T \left(\sqrt{\frac{\sigma_c}{\sigma_T} + 1} - \sqrt{1+a} \right),$$

som optræder for $\sigma_n = b$.

Forskydningspændingen for $\sigma_n = \sigma_c - \sigma_T$, hvor hovedspændingshypotesen giver største værdi for τ_n , bliver

$$\tau_n = \sigma_T \sqrt{\sqrt{\frac{\frac{\sigma_c}{\sigma_T} + 1}{1+a}} - 1 - \frac{1}{4(1+a)}}.$$

Specielt for parablen ($a = 0$) fås grænsekurvens ligning

$$\tau = (\sqrt{\sigma_c + \sigma_T} - \sqrt{\sigma_T}) \cdot \sqrt{\sigma_T + \sigma}$$

og ligningen for den kritiske kurve σ_n, τ_n

$$\tau_n = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_c - \sigma_n) \left(\sigma_n - [\sigma_c + 4\sigma_T - 4\sqrt{(\sigma_c + \sigma_T)\sigma_T}] \right)}$$

gældende for

$$\sigma_n \geq \sigma_g = \sigma_c - 2\sqrt{(\sigma_c + \sigma_T) \sigma_T}$$

Ved at regne parabolisk grænsekurve fås fuld overensstemmelse med Mörsch's forsøg, der alle falder i området $\sigma_n < \sigma_g$.¹⁾

Når jeg ikke er blevet stående ved den paraboliske grænsekurve, skyldes det den principielle karakter, som grænsekurven må ventes at antage i sit videre forløb ud over det eenaksede trykforsøg. Selv om materialets indre friktion kan påvirkes af de påførte ydre tryk, er det dog rimeligt at forvente, at den ikke vil synke under en vis grænseværdi, og at grænsekurven derfor tilsvarende vil nærme sig til en konstant hældning. På denne baggrund forekommer en hyperbel mere tiltalende end parablen, idet den giver håb om også at kunne anvendes uden for det af eenakset tryk afgrænsede område.

Triaxiale trykforsøg med beton, som RICHART, BRANDTZAEG og BROWN har udført i Illinois²⁾, viser et sådant hyperbellignende forløb af grænsekurven. Asymptotehældningen syntes ved disse forsøg at være ca. 0,6.

Nyere amerikanske forsøg udførtes i 1949 på laboratoriet for byggeforskning i Denver³⁾. Forsøgene, som medtager trykhovedspændinger helt op mod 6000 kg/cm², er nærmere undersøgt af CHAMBAUD⁴⁾, der når til en meget smuk overensstemmelse med en grænsekurve af formen

$$\sigma + k_1 = k_2 \cdot \tau^\gamma,$$

hvorved eksponenten γ fandtes lig 1,3 à 1,4. Kurven lader sig imidlertid næppe anvende for området med mindre trykhovedspænding end det simple trykforsøg. Dels er den ikke verificeret i dette område, dels er uoverensstemmelsen mellem kurve og forsøg forholdsvis stor ved det simple trykforsøg. Kurven har desuden krumningsradius nul ved σ -aksen. Kurvens krumning i det triaxiale område er meget svag,

¹⁾ Se derom A. LEON: »Über das Mass der Anstrengung bei Beton«, Ingenieurarchiv 1933, s. 421 ff.

²⁾ FRANK E. RICHART, ANTON BRANDTZAEG og REX L. BROWN: »A study of the failure of concrete under combined compressive stresses«, University of Illinois, Bulletin nr. 185, nov. 1928.

³⁾ Shearing Strength of Concrete under high triaxial Stress. — Computation of MOHR'S Enveloppe as a Curve. Structural Research Laboratory, Report nr. S. P. 23. Branch of Design and Construction, Denver (Colorado), okt. 1949.

⁴⁾ M. R. CHAMBAUD: »Résistance du béton aux contraintes triaxiales«. Annales de l'institut technique du bâtiment et des travaux publics, Paris, feb. 1951.

selv om den teoretisk skal nærme sig til en vandret tangent for meget store tryk. For trykhovedspændinger større end 2000 kg/cm² kunne forsøgene fuldt så godt være tilnærmet med en ret linie som grænsekurve. Asymptotehældningen er ca. 0,5. Det bemærkes imidlertid, at grænsekurven tangerer cirklen for eenakset tryk med større stejlhed $\frac{d\tau}{d\sigma} = \text{ca. } 1,2$ end den i det følgende behandlede hyperbolske grænsekurve, og da grænsekurvens hældning på dette sted er bestemmende for forløbet af den kritiske σ_n , τ_n -kurve omkring $\sigma_n = \sigma_T$, tyder det på, at den virkelige σ_n , τ_n -kurve i nærheden af trykhovedspændingen ligger noget lavere end den ud fra hyperblen bestemte. For dog at tage noget hensyn hertil er den fra Illinoisforsøgene skønnede asymptotehældning 0,6 bibeholdt i de følgende hyperbelberegninger. Denne værdi er iøvrigt den største, som kan give overensstemmelse med Mörsch's forsøg, se herom nærmere nedenfor.

Hyperblens ligning er således

$$\tau = \sqrt{a\sigma^2 + b\sigma + c},$$

hvor

$$\sqrt{a} = 0,6, \text{ altså } a = 0,36,$$

$$b = \sigma_T \left(\frac{\sigma_c}{\sigma_T} + 2,72 - 2,33 \sqrt{\frac{\sigma_c}{\sigma_T} + 1} \right)$$

og

$$c = \sigma_T^2 \left(\frac{\sigma_c}{\sigma_T} + 2,36 - 2,33 \sqrt{\frac{\sigma_c}{\sigma_T} + 1} \right).$$

Ellipsen for σ_n , τ_n har ligningen

$$\tau = 0,43 \sqrt{(\sigma_c - \sigma_n)(\sigma_n - d)},$$

hvor

$$d = \sigma_T \left(\frac{\sigma_c}{\sigma_T} + 5,44 - 4,66 \sqrt{\frac{\sigma_c}{\sigma_T} + 1} \right).$$

Ellipsen gælder for

$$\sigma_n \geq \sigma_T \left(\frac{\sigma_c}{\sigma_T} - 2,33 \sqrt{\frac{\sigma_c}{\sigma_T} + 1} \right).$$

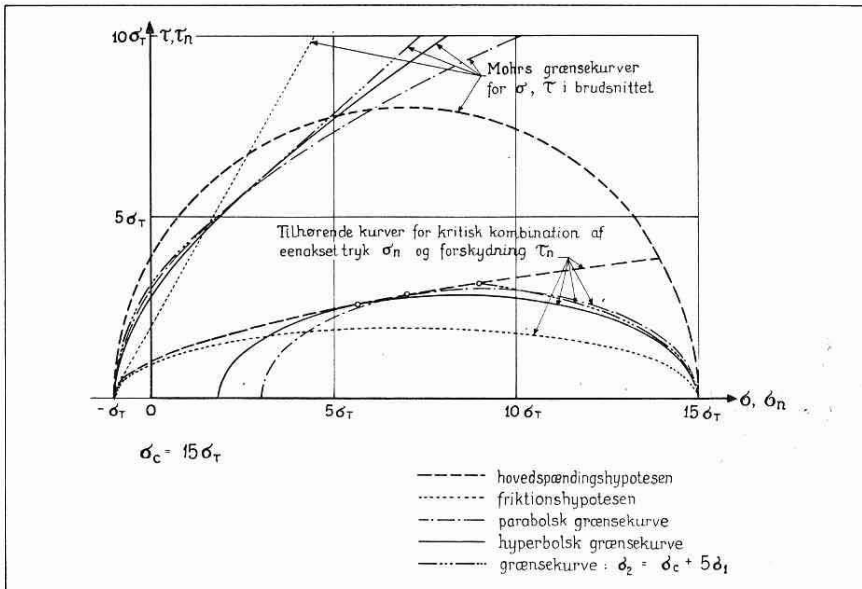


Fig. 13.

For mindre σ_n gælder parablen

$$\tau_n = \sigma_T \sqrt{\frac{\sigma_n}{\sigma_T} + 1}$$

Ved Mörsch's forsøg var $\sigma_c = 14 \sigma_T$. Ellipsen gælder da for $\sigma_n > 5,3 \sigma_T$. Mörsch's forsøg strakte sig ganske vist til $\sigma_n = 5,8 \sigma_T$, men da parablen og ellipsen tangerer hinanden i overgangspunktet mærkes forskellen endnu ikke ved $\sigma_n = 5,8 \sigma_T$. Mörsch's forsøg, efter hvilke hovedspændingshypotesen skulle gælde inden for det undersøgte område, stemmer således godt med den valgte grænsekurve. Desværre kendes forsøg ikke for området $6 \sigma_T < \sigma_n < \sigma_c$, hvor hypoteserne afviger stærkt indbyrdes. Indtil sådanne forsøg foreligger, må hyperblen da anses for den bedste, idet den rigtige kurve måske dog i nærheden af σ_c ligger mellem hyperbel- og friktionshypotesen.

På fig. 13 er indtegnet de forskellige antagne grænsekurver σ , τ og de tilsvarende kritiske kurver for forskydningsspændingen τ_n i lodrette snit som funktion af normalspændingen, idet normalspændingen i de vandrette snit antages lig 0. Alle kurver er tegnet for $\sigma_c = 15 \sigma_T$.

Den tilsyneladende store talfaktor har sin forklaring i, at den sande trækstyrke kun er ca. 0,6 gange bøjningstrækstyrken¹⁾.

Den efter hovedspændingshypotesen tilladelige forskydningsspænding i lodrette snit er i området med store normalspændinger langt større end tilladeligt efter de andre brudhypoteser. Værst er forholdet for $\sigma_n = 14 \sigma_T$, hvor de forskellige hypoteser giver

Mohrs grænsekurve	τ_n for $\sigma_n = 14 \sigma_T$
Cirkel (hovedspændingshypotesen)	3,87 σ_T
Ret linie (friktionshypotesen)	0,94 σ_T
Parabel	1,66 σ_T
Hyperbel ($a = 0,36$)	1,50 σ_T

af hvilke værdier den sidste indtil videre må anses for den rigtigste.

Som tilnærmelse til brug for praksis blev det i et udkast til strengbetonvejledningen af normudvalget for forspændt beton foreslået, at 1. største hovedtrækspænding ikke må overstige trækstyrken, og 2. største hovedtrykspænding ikke må overstige et udtryk af formen $\sigma_c + n\sigma_1$, hvor σ_1 er mindste hovedspænding regnet positiv som tryk.

Den tilsvarende Mohr's grænsekurve er sammensat af en ret linie med ligningen

$$\tau = \frac{n-1}{2\sqrt{n}} \left(\sigma + \frac{\sigma_c}{n-1} \right)$$

og en tangerende cirkelbue gennem $(-\sigma_T, 0)$.

Den dertil hørende kritiske kurve for σ_n, τ_n bliver en ellipse med ligningen

$$\tau_n = \frac{\sqrt{n}}{n+1} \sqrt{(\sigma_c - \sigma_n) \left(\sigma_n + \frac{\sigma_c}{n} \right)}.$$

Denne ellipse gælder for $\sigma_n \geq \sigma_c - (n+1)\sigma_T$.

For mindre værdier af σ_n gælder parablen

$$\tau_n = \sqrt{\sigma_T(\sigma_T + \sigma_n)}.$$

Den sammensatte kritiske kurve for τ_n har knæk i overgangspunktet.

1) Efter CAQUOT's forsøg. Gengivet i L'HERMITE: „Nouvelles recherches sur le beton“, Paris 1949.

På fig. 13 er denne kurve indlagt med $n = 5$, som i det store og hele giver god overensstemmelse med den foran udledte med hyperblen som grænsekurve.

C. BEMÆRKNINGER OM BRUDDETS NATUR

Som det fremgår af det foregående, er Mohr's brudteori særdeles omfattende og velegnet til opstilling af en beregning for, hvilke spændingskombinationer der må anses for farlige.

En fuldstændig klarlægning af betonens brudforhold ved Mohr's teori kan man imidlertid ikke vente. Som foran nævnt er betonen et heterogent materiale med forskellige egenskaber fra korn til korn, medens en praktisk brudteori skal give udtryk for en helhedsvirkning af materialet.

Når et betonlegeme brydes, dannes der sammenhængende brudflader igennem legemet. Brudfladerne går gennem et stort antal partikler, der har forskellig styrke overfor påvirkningen, således at nogle vil nå brudtilstanden før end andre. De ubrudte partikler vil da danne et skelet, som holder sammen på materialet.

Er der f. eks. tale om et prisme, som trykkes i lodret retning, ville de brudte partikler lade sig trykke ud til siden, dersom skelettet ikke fandtes. Der opstår derfor et tværtræk i skelettet. Det endelige brud finder sted, når dette tværtræk er vokset og skelettet svækket så meget, at tværkraften ikke længere kan optages. Da skelettet alene ville brydes med lodrette revner, kan den samlede brudflade blive noget stejlere, end hvad der måtte ventes efter Mohrs teori. Dette stemmer også med forsøgene. (Med hyperbolsk grænsekurve skulle brudvinklen således danne 23° med lodret, når $\sigma_c = 15 \sigma_T$, medens den i virkeligheden er stejlere).

Selv om Mohrs teori gælder for de enkelte korn, og den mellemste hovedspænding derfor for disse er uden betydning, behøver dette herefter ikke at gælde for betonlegemet som helhed, om end det er en udmærket tilnærmelse for praksis. BRANDTZAEG har ud fra betragtninger som de foregående matematisk formuleret en brudteori¹⁾, hvor han regner ens styrkeegenskaber for alle korn, men kun tillader dem at revne i bestemte retninger, der ligger gunstigt eller ugunstigt for den påførte belastning, tilfældig fordelt over legemet.

¹⁾ ANTON BRANDTZAEG: "Failure of a Material composed of Non-Isotropic Elements". Det Kgl. Norske Videnskabers Selskabs Skrifter. 1927. no. 2. Refereret i førnævnte Illinois-bulletin.

For de enkelte korn regner BRANDTZAEG med friktionshypotesen. Når enkelte korn er brudt, regnes spændingskombinationen i disse vedvarende at følge friktionshypotesens rette linie, indtil det endelige brud finder sted i konstruktionen. Ved denne teori finder BRANDTZAEG, at brudkraften ændres i samme retning med den mellemste hovedspænding som efter deformationshypotesen. Ved Illinoisforsøgene undersøgte dette forhold, men der fandtes ingen klar afhængighed af den mellemste hovedspænding. Roš mener for cementmørtel at have fundet en lille indflydelse af den mellemste hovedspænding i modsat retning af den forventede. For marmor, som i nogen grad må formodes at ligne beton, har v. KARMAN og BÖKER derimod fundet en variation med den mellemste hovedspænding i den ventede retning.¹⁾

Om end brudstyrkens afhængighed af den mellemste hovedspænding kan have principiel betydning for forståelsen af betonbruddets natur, er denne indflydelse i hvert fald kvantitativt så ringe, at det for praksis vil være fuldt forsvarligt at se bort derfra og regne med spændingsbrud efter Mohr's teori, som om betonen var et homogent materiale.

OVERSIGT

Artiklen giver i afsnit A en oversigt over de almindeligste brudhypoteser og deres anvendelse specielt på plan spændingstilstand. Det vises, at en brudteori for beton kan opbygges på grundlag af spændingshypotesen, som i sin videste form fremstilles ved fastlæggelse af Mohr's kritiske kurve for, hvorledes forskydningsspændingen τ afhænger af normalspændingen σ i brudsnittet.

I afsnit B er undersøgt forskellige muligheder for forløbet af den kritiske kurve (σ , τ) og de deraf afledte kritiske spændinger σ_n og τ_n i tværsnit af bjælker, når normalspændingen i de derpå vinkelrette vandrette snit kan regnes forsvindende. Betonen er herved karakteriseret ved sin trykstyrke σ_c og trækstyrke σ_T .

På fig. 13 er optegnet undersøgelsens resultater for $\sigma_c = 15 \sigma_T$. Det skønnes, at den bedste af de tegnede grænsekurver er hyperbelen med symmetriakse i σ -aksen. Denne kurve og den tilsvarende for (σ_n , τ_n)

¹⁾ Forsøgsresultaterne for såvel cementmørtel som marmor er gengivet i M. Roš & A. EICHINGER: »Die Bruchgefahr fester Körper bei ruhender — statischer — Beanspruchung«, Eidgenössische Materialprüfungs- und Versuchsanstalt für Industrie, Bauwesen und Gewerbe, Bericht Nr. 172, Zürich, sept. 1949.

er fuldt optrukket på figuren. Det vises, at man for praksis kan få en god tilnærmelse til denne kurve ved at regne

$$\sigma_2 = \sigma_c - 5 \sigma_1, \text{ og } \sigma_1 > -\sigma_T,$$

hvor σ_2 og σ_1 betegner henholdsvis største og mindste hovedspænding regnet positiv som tryk. Muligvis vil dog forsøg vise et noget stejlere forløb af grænsekurven (σ, τ) og dermed en noget lavere kurve for (σ_n, τ_n) .

Kurven for (σ_n, τ_n) viser, at når der til en eenakset trykspænding i en snitflade føjes en mindre forskydningsspænding, falder værdien af brudspændingen meget hurtigt og langt stærkere end den almindelige hovedspændingshypotese, $\sigma_2 < \sigma_c$, giver udtryk for. Hovedspændingshypotesen er på fig. 13 indtegnet med kraftig streglinie.

I afsnit C gøres nogle bemærkninger om betonbruddets natur og om den mellemste hovedspændings eventuelle indflydelse på brudspændingens størrelse.

SUMMARY

In section A the article reviews the principal theories of rupture and their applications especially on the plane problem. It is shown that a theory of rupture for concrete may be based upon the hypothesis of stresses which in its general form is illustrated by Mohr's critical (shear, compression)-diagram.

In section B various forms of the critical (τ, σ) -curve are investigated as well as the hereof derived critical stresses, σ_n and τ_n , on beam sections, the normal stresses acting along the two other axes being assumed negligible. The concrete is here characterized by its compressive strength, σ_c , and its tensile strength, σ_T .

Fig. 13 shows the results of the investigation $\sigma_c = 15 \sigma_T$. Of the tentative limiting curves shown the hyperbola having its axis of symmetry in the σ -axis appears to be the most suitable. The hyperbola as well as the (τ_n, σ_n) -curve are shown in bold lines on the diagram. It is shown that a good approximation of the (τ_n, σ_n) -curve is arrived at by putting:

$$\sigma_2 = \sigma_c - 5\sigma_1, \text{ and } \sigma_1 > -\sigma_T,$$

σ_2 and σ_1 signifying the major and the minor principal stresses, respectively, counting compression as positive. Possibly, however, tests will indicate a somewhat steeper run of the limiting curve (σ, τ) and consequently, a flatter (σ_n, τ_n) -curve.

The (σ_n, τ_n) -curve shows that the superimposition of a slight shearing stress on a one-axial compression acting on a section effects a rapid decrease of the ultimate strength and, as a matter of fact, much more so than it would appear from the general hypotheses of principal stresses. In fig. 13 a bold line indicates the hypothesis of principal stresses.

In section C the nature of the rupture is discussed as well as the possibility of the intermediate principal stress affecting the ultimate strength.